一、单选题

1．已知全集$U=\left\{x\middle|0\le x<5,x\in \mathrm{N}^*\right\}$，集合$P=\{1,2,3\}$，$Q=\{2,4\}$，则$({}_{U}P)\cup Q=$（　）

A．$\{0,2,3,4\}$　　B．$\{2,4\}$

C．$\{2,3,4\}$　　D．$\{1,2,4\}$

【答案】B

【分析】由集合的运算求解即可.

【详解】因为$U=\left\{x\middle|0\le x<5,x\in \mathrm{N}^*\right\}=U=\{1,2,3,4\}$，

所以$({}_{U}P)\cup Q=\{4\}\cup\{2,4\}=\{2,4\}$.

故选：B

2．已知$a>b>0,c<d<0$，则下列不等式中正确的是（　）

A．$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$　　B．$c^2<cd$

C．$a+c<b+d$　　D．$\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$

【答案】D

【分析】结合特值，排除法得到正确选项；作差比较法或利用不等式的性质分析也可以解决问题.

【详解】法一：已知$a>b>0$，$c<d<0$，

令$a=2$，$b=1$，$c=-2$，$d=-1$，

则$-\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{b}=-1$，$-\frac{1}{2}>-1$，故A项不正确；

又$c^2=4$，$cd=2$，$4>2$，故B项不正确；

而$a+c=b+d=0$，故C项也不正确；

所以排除ABC.

法二：在$a>b$两边同除以负数$-ab$得$-\frac{1}{b}<-\frac{1}{a}$，与A项矛盾；

$c^2-cd=c(c-d)>0$，与B项矛盾；

由$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$，又$a-b>0$，$c-d<0$，

故$(a-b)+(c-d)$不一定小于0，故C项不正确；

由$c<d<0$得，$-c>-d>0$，又$a>b>0$，两式相乘得$-ac>-bd$，

两边同除以负数$-cd$可得，$\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$，故D项正确.

故选：D.

3．已知$\log_2 3=a$，则下列能化简为$\frac{a}{1+2a}$的是（　）

A．$\log_8 3$　　B．$\log_{18} 3$　　C．$\log_{18} 6$　　D．$\log_{12} 3$

【答案】B

【分析】由对数运算法则和换底公式依次化简各个选项即可.

【详解】对于A，$\log_8 3=\log_{2^3} 3=\frac{1}{3}\log_2 3=\frac{1}{3}a$，A错误；

对于B，$\log_{18} 3=\frac{\log_2 3}{\log_2 18}=\frac{\log_2 3}{\log_2 2+2\log_2 3}=\frac{\log_2 3}{1+2\log_2 3}=\frac{a}{1+2a}$，B正确；

对于C，$\log_{18} 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 18}=\frac{\log_2 2+\log_2 3}{\log_2 2+2\log_2 3}=\frac{1+\log_2 3}{1+2\log_2 3}=\frac{1+a}{1+2a}$，C错误；

对于D，$\log_{12} 3=\frac{\log_2 3}{\log_2 12}=\frac{\log_2 3}{2\log_2 2+\log_2 3}=\frac{\log_2 3}{2+\log_2 3}=\frac{a}{2+a}$，D错误.

故选：B.

4．设$\log_7 4=a,\log_7 3=b$，则$\log_{49}36=$（　）

A．$\frac{1}{2}a-b$　　B．$\frac{1}{2}b+a$　　C．$\frac{1}{2}a+b$　　D．$\frac{1}{2}b-a$

【答案】C

【分析】根据对数的运算性质计算即可.

【详解】解：$\log_{49}36=\log_{7^2}6^2=\log_7 6=\log_7 2+\log_7 3=\frac{1}{2}\log_7 4+\log_7 3=\frac{1}{2}a+b$.

故选：C.

5．已知$\log_a b=\lg 100$．若$b=a+2$，则$a=$（　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．$\sqrt{2}$

【答案】A

【分析】由题可得出$a^2=b=a+2$，即可求出.

【详解】因为$\log_a b=\lg 100=2$，所以$a^2=b$，

因为$b=a+2$，所以$a^2=a+2$，解得$a=-1$或2，

因为$a>0$且$a\neq 1$，所以$a=2$.

故选：A.

6．若 $2^a=5^b=10$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$

A． $\frac{1}{2}$　　　　B． 1　　　　C． $\frac{3}{2}$　　　　D． 2

【答案】B

【分析】由换底公式将原式化为 $\log_2 10=a$，$\log_5 10=b$．那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$=lg2+lg5，再由加法公式得到结果.

【详解】由 $2a=5b=10$，由换底公式可得 $\log_2 10=a$，$\log_5 10=b$．那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

=lg2+lg5=lg10=1．

故选 B．

【点睛】对数的运算性质:如果 $a>0,$臂$a\neq 1, M>0, N>0$，那么：（1） $log_a(M\cdot N)=$

log_aM+log_aN；（2） $log_a\frac{M}{N}=log_aM-log_aN$；（3） $log_aM^n=nlog_aM\ (n\in R)$．

7．设全集 $U=R$，集合 $A=\{x|1<x<4\}$，集合 $B=\{x|0<x<2\}$，则集合 $A\bigcap\left({}_U B\right)=$（　）

A． $(1,2)$　　　　B． $(1,2]$　　　　C． $(2,4)$　　　　D． $[2,4)$

【答案】D

【分析】利用补集和交集的定义可求得结果.

【详解】由已知可得 ${}_U B=\{x|x\leq 0$或$x\geq 2\}$，因此， $A\cap {}_U B=\{x|2\leq x<4\}$，

故选：D.

8．设全集 $U=R$，集合 $A=\{x\,|\,x<-1\}$， $B=\{x\,|\,-7<2+3x<5\}$，则 $C_U(A\bigcup B)=$

A． $\{x\,|\,-3<x<-1\}$　　　　B． $\{x\,|\,x\leq -3$璋$x\geq -1\}$

C． $\{x\,|\,x\geq 1\}$　　　　D． $\{x\,|\,x\geq -3\}$

【答案】C

【分析】解不等式得集合 B，再利用集合的并集和补集定义直接求解即可.

【详解】因为 $A=\{x\,|\,x<-1\}$， $B=\{x\,|\,-3<x<1\}$，所以 $A\cup B=\{x\,|\,x<1\}$，

$C_U\left(A\cup B\right)=\{x\,|\,x\geq 1\}$

故选 C.

【点睛】本题主要考查了集合的基本运算，属于基础题.

9．如果 $a<b<0$，那么下列不等式中正确的是（　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

B．$a^2<b^2$

C．$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

D．$\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$

【答案】D

【分析】根据特殊值排除选项A、B、C；根据不等式的基本性质判断选项D.

【详解】当$a=-2,b=-1$时，

对于A，$\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}>\frac{1}{b}=-1$，故A错误；

对于B，$a^2=4>b^2=1$，故B错误；

对于C，$\frac{1}{a-b}=-1<\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$，故C错误；

对于D，$a<b<0$，所以$a^2>ab>b^2$，即$a^2>b^2>0$，则$\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$，故D正确.

故选：D.

10．对于实数a,b,c，下列说法正确的是（　）

A．若$a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

B．若$a>b$，则$ac^2>bc^2$

C．若$a>0>b$，则$ab<a^2$

D．若$c>a>b$，则$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$

【答案】C

【分析】根据不等式的基本性质及恰当的特殊值可逐一判断.

【详解】对于A选项，若$a=0$或$b=0$，$\frac{1}{a}$或$\frac{1}{b}$显然无意义.故A选项错误；

对于B选项，若$c=0$，则$ac^2=bc^2$.故B选项错误；

对于C选项，因为$a>0>b$，所以各项同时乘以a得$a^2>0>ab$.故C正确；

对于D选项，因为$c>a>b$，所以$-c<-a<-b$，所以$0<c-a<c-b$，

所以$0<\frac{c-a}{(c-a)(c-b)}<\frac{c-b}{(c-a)(c-b)}$，即$\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$.因为根据题意不知道$a,b$的符号，所以无法满足同向可乘性的条件.故D错误.

故选：C.

11．设$x\in\mathrm{R}$，则“$\sqrt{x+1}\le 2$”是“$|x-1|<2$”的（　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】解不等式，根据解的范围大小得到答案.

【详解】$\sqrt{x+1}\le 2$，则$-1\le x\le 3$；$|x-1|<2$，则$-1<x<3$，

故“$\sqrt{x+1}\le 2$”是“$|x-1|<2$”的必要不充分条件.

故选：B

12．已知$x\in\mathbf{R}$，则“$x^2<1$”是“$\frac{1}{x}>1$”成立的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】解两个不等式，再由充分条件和必要条件的定义即可得出答案.

【详解】解不等式$\frac{1}{x}>1$，得$\frac{1}{x}-1>0$即$\frac{1-x}{x}>0$，则$0<x<1$，

解不等式$x^2<1$，得$-1<x<1$.

所以“$x<1$”是“$-1<x<1$”成立的必要不充分条件，

即“$x^2<1$”是“$\frac{1}{x}>1$”成立的必要不充分条件.

故选：B.

13．“$x-y>-1$”是“$x^3+x>x^2y+y$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．既不充分也不必要条件

C．充要条件　　D．必要不充分条件

【答案】D

【分析】根据充分、必要条件等知识确定正确答案.

【详解】由$x^3+x>x^2y+y$得$x^3-x^2y+x-y=x^2(x-y)+x-y=(x^2+1)(x-y)>0$，

所以$x-y>0$，

所以$x-y>-1$是$x-y>0$的必要不充分条件.

故选：D

14．已知$a=3^{-0.1}$，$b=\log_{\frac{1}{3}}5$，$c=\log_{\sqrt{3}}2$，则（　）.

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$

【答案】B

【分析】利用“0,1分段法”确定正确答案.

【详解】$0<3^{-0.1}<3^{0}=1,\log_{\frac{1}{3}}5<\log_{\frac{1}{3}}1=0$，

$\log_{\sqrt{3}}2>\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$，所以$b<a<c$.

故选：B

15．已知$a=2^{0.1},b=2\ln\frac{1}{2},c=\ln 2$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

A．$c>a>b$　　　　B．$a>c>b$

C．$b>a>c$　　　　D．$b>c>a$

【答案】B

【分析】利用“0,1分段法”来求得a,b,c的大小关系.

【详解】$a=2^{0.1}>2^{0}=1$，

$b=2\ln\frac{1}{2}<0$，

$c=\ln 2\in(0,1)$，

所以$a>c>b$.

故选：B

16．已知$a=0.9^{1.3},b=1.3^{0.9},c=\log_2 3$，则（　）

A．$a<c<b$　　　　B．$c<a<b$

C．$a<b<c$　　　　D．$c<b<a$

【答案】C

【分析】利用指对函数的单调性和中间值比较大小即可.

【详解】由$0.9^{1.3}<0.9^{0}=1$，则$a<1$，

由$1.3^{0.9}>1.3^{0}=1$，$1.3^{0.9}<1.3^{1}=1.3$，则$1<b<1.3$，

由$1.5=\log_2\sqrt{8}<\log_2 3=\log_2\sqrt{9}$，则$c>1.5$.

则$a<b<c$.

故选：C

17．已知$a=3^{0.5}$，$b=\log_3 0.5$，$c=0.5^{3}$，则a，b，c的大小关系为（　）

A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$b>a>c$　　D．$a>c>b$

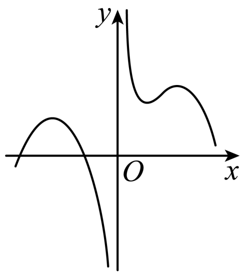
【答案】D

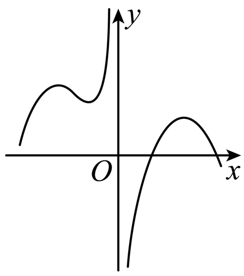
【分析】根据指对数的性质判断大小关系即可.

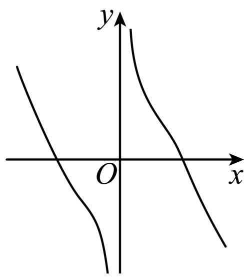
【详解】由 $a=3^{0.5}>1>c=0.5^{3}>0>b=\log_{3}0.5$，即 $a>c>b$.

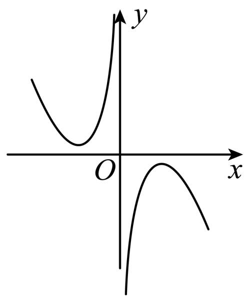
故选：D

18．函数 $f\left(x\right)=x\cos x-\dfrac{1}{x}$， $x\in\left(-\pi,0\right)\cup\left(0,\pi\right)$上的图象大致为（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【分析】分析函数 $f\left(x\right)$的奇偶性及其在$\left(0,1\right)$上的函数值符号，结合排除法可得出合适的选项.

【详解】函数 $f\left(x\right)$的定义域为$\left(-\pi,0\right)\cup\left(0,\pi\right)$，

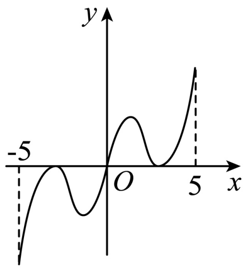
则 $f\left(-x\right)=-x\cos\left(-x\right)+\dfrac{1}{x}=-x\cos x+\dfrac{1}{x}=-f\left(x\right)$，

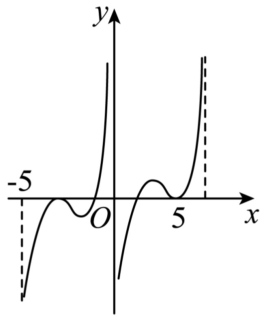
所以，函数 $f\left(x\right)$为奇函数，排除 AB 选项，

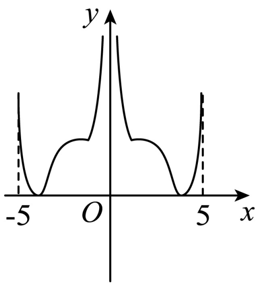
当$0<x<1$时， $f\left(x\right)=x\cos x-\dfrac{1}{x}<x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^{2}-1}{x}<0$，排除 C 选项.

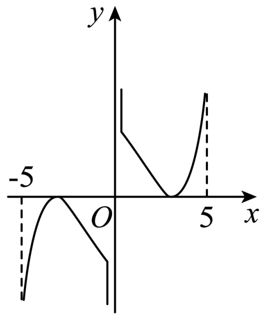
故选：D.

19．函数 $y=\left(1+\cos x\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$在$\left(-5,0\right)\cup\left(0,5\right)$上的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【分析】设 $f\left(x\right)=\left(1+\cos x\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，由 $x\in\left(-5,0\right)\cup\left(0,5\right)$ 排除 A 选项，再分析该函数的奇偶性及其在 $\left(0,1\right)$ 的函数值符号，结合排除法可得出合适的选项.

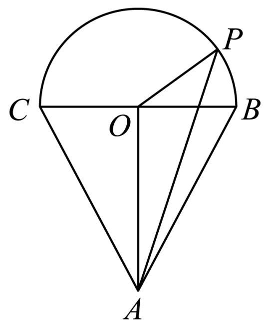
【详解】设 $f\left(x\right)=\left(1+\cos x\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，因为 $x\in\left(-5,0\right)\cup\left(0,5\right)$，排除 A 选项，

$f\left(-x\right)=\left[1+\cos\left(-x\right)\right]\left(-x-\dfrac{1}{-x}\right)=-\left(1+\cos x\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)$，即函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，排除 C 选项，

当 $0<x<1$ 时，$\cos x>0$，$x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}<0$，此时 $f\left(x\right)=\left(1+\cos x\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<0$，排除 D 选项.

故选：B.

20．如下图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=\sqrt{5}$，$BC=2$，以 BC 的中点 O 为圆心，BC 为直径在三角形的外部作半圆弧 BC，点 P 在半圆上运动，设 $\angle BOP=\theta$，$\theta\in\left[0,\pi\right]$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为（　　）



A．5　　　B．6　　　C．$4-\sqrt{5}$　　　D．$4+\sqrt{5}$

【答案】D

【分析】以O为原点，建立平面直角坐标系，求得向量$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta,\sin\theta+2),\overrightarrow{AB}=(1,2)$，利用向量的数量积的坐标运算公式，得到$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)+4$，即可求解.

【详解】以O为原点，OB,AO所在的直线分别为x轴、y轴建立平面直角坐标系，如图所示，

在VABC中，$AB=AC=\sqrt{5},BC=2$，O为BC的中点，所以$AO=\sqrt{5-1}=2$，

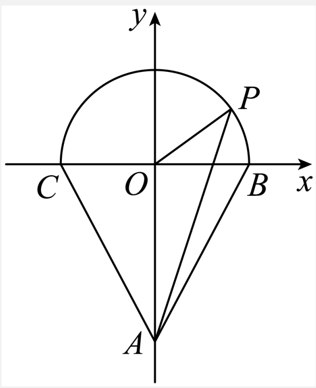
则$O(0,0),A(0,-2),B(1,0),C(-1,0),P(\cos\theta,\sin\theta)$，其中$\theta\in[0,\pi]$，

可得$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta,\sin\theta+2),\overrightarrow{AB}=(1,2)$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\cos\theta+2\sin\theta+4=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)+4$，其中$\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

当$\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时，即$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$有最大值，最大值为$\sqrt{5}+4$.

故选：D.



21．已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+4,x<2\\ \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{x},x\geq 2\end{cases}$，设$a\in\mathrm{R}$，若关于$x$的不等式$f(x)\geq|x-a|$在R上恒成立，则$a$的取值范围是（　）

A. $\left[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{7}{4},\frac{15}{4}\right]$　　C. $\left[-\frac{7}{4},\frac{11}{2}\right]$　　D. $\left[-\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right]$

【答案】A

【分析】根据分段函数的性质，分情况建立不等式，利用二次函数与导数，求得最值，可得答案.

【详解】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+4,x<2\\ \frac{3}{2}x+\frac{1}{x},x\ge 2\end{cases}$，设 $a\in\mathrm{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\ge|x-a|$ 在R上恒成立，

当 $x<2$ 时，$-x^2+2x-4\le x-a\le x^2-2x+4$，$\begin{cases}a\ge -x^2+3x-4\\ a\le x^2-x+4\end{cases}$，

$y_1=-x^2+3x-4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$，当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$y_{1\max}=-\frac{7}{4}$，

$y_2=x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y_{2\min}=\frac{15}{4}$，则 $-\frac{7}{4}\le a\le\frac{15}{4}$.

当 $x\ge 2$ 时，$-\frac{3}{2}x-\frac{1}{x}\le x-a\le\frac{3}{2}x+\frac{1}{x}$，则 $\begin{cases}a\ge -\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}\\ a\le\frac{5x}{2}+\frac{1}{x}\end{cases}$，

$y_3=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}$，$y_3'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}=\frac{2-x^2}{2x^2}$，当 $x\ge 2$ 时，$y_3'<0$，函数 y_3 单调递减，则 $y_{3\max}=-\frac{3}{2}$；

$y_4=\frac{5x}{2}+\frac{1}{x}$，$y_4'=\frac{5}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{5x^2-2}{2x^2}$，当 $x\ge 2$ 时，$y_4'>0$，函数 y_4 单调递增，则 $y_{4\min}=\frac{11}{2}$，

所以 $-\frac{3}{2}\le a\le\frac{11}{2}$.

综上，$-\frac{3}{2}\le a\le\frac{15}{4}$.

故选：A.

22．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|+2,x<1\\ x+\frac{2}{x},x\ge 1\end{cases}$，设 $a\in\mathrm{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\ge\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 在R上恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

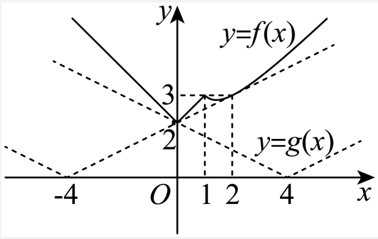
A. $\left[-2,\frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$　　B. $[-2,2]$

C. $\left[-\frac{5}{2}\sqrt{2},2\right]$　　D. $\left[-\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

【答案】B

【分析】由题意，令 $g(x)=\left|\frac{x}{2}+a\right|$，作出函数 $f(x)$ 的图象，当 $y=\frac{x}{2}+a$ 的图象与 $y=x+\frac{2}{x}(x\ge 1)$ 的图象相切时求得 $a=2$，若使得不等式 $f(x)\ge\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 在 R 上恒成立，需满足 $-a\le 2\le 0$ 、$0\le a\le 2$，即可求解.

【详解】由题意知，令 $g(x)=\left|\frac{x}{2}+a\right|$，函数 $f(x)$ 的图象如图所示，



当函数 $g(x)$ 的图象经过点 $(0,2)$ 时，得 $a=\pm 2$.

当 $y=\frac{x}{2}+a$ 的图象与 $y=x+\frac{2}{x}(x\ge 1)$ 的图象相切时，

由 $\frac{x}{2}+a=x+\frac{2}{x}$，得 $x^2-2ax+4=0$，结合图形，由 $\Delta=0$ 得 $a=2$.

若不等式 $f(x)\ge\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 在 R 上恒成立，

当 $a\le 0$ 时，需满足 $-a\le 2$，即 $-a\le 2\le 0$，

当 $a>0$ 时，需满足 $a\le 2$，即 $0\le a\le 2$，

所以 $-2\le a\le 2$，

所以实数 a 的取值范围为 $[-2,2]$.

故选：B.

23．已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-2,x\le 0\\3x-2,x>0\end{cases}$，若 $|f(x)|\ge ax$ 在 $x\in[-1,1]$ 上恒成立，则实数 a 的范围是（　）

A．$(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$　　　　B．$[-1,0]$

C．$[0,1]$　　　　D．$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

【答案】B

【分析】法一：分 $x\in[-1,0]$ 和 $x\in(0,1]$，结合函数单调性和函数值的正负得到不等式，求出实数 a 的范围范围；

法二：画出 $y=\left|f\left(x\right)\right|$ 与 $y=ax$ 的图象，数形结合求出实数 a 的范围.

【详解】法一：当 $x\in\left[-1,0\right]$ 时，$f(x)=x^2-2$，

由于 $f(x)=x^2-2$ 在 $x\in\left[-1,0\right]$ 上单调递减，

故 $f(x)=x^2-2x\in\left[f\left(0\right),f\left(-1\right)\right]=\left[-2,-1\right]$，

则 $\left|f\left(x\right)\right|=2-x^2$，所以 $2-x^2\geq ax$，

即 $x^2+ax-2\leq 0$ 在 $x\in\left[-1,0\right]$ 恒成立，

令 $g\left(x\right)=x^2+ax-2$

由于 $\Delta=a^2+8>0$，$g\left(0\right)=-2$，

故只需 $g\left(-1\right)\leq 0$，即 $1-a-2\leq 0$，解得 $a\geq -1$，

当 $x\in\left(0,1\right]$ 时，$f(x)=3x-2$，此时函数单调递增，

当 $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$ 时，$f(x)=3x-2\leq 0$，此时 $\left|f(x)\right|=2-3x$，

由 $\left|f\left(x\right)\right|\geq ax$ 得 $2-3x\geq ax$，即 $\left(a+3\right)x-2\leq 0$ 在 $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$ 恒成立，

令 $k\left(x\right)=\left(a+3\right)x-2$，由于 $k\left(0\right)=-2$，

故只需 $k\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(a+3\right)-2\leq 0$，解得 $a\leq 0$，

当 $x\in\left(\frac{2}{3},1\right]$ 时，$f(x)=3x-2>0$，此时 $\left|f(x)\right|=3x-2$，

由 $\left|f\left(x\right)\right|\geq ax$ 得 $3x-2\geq ax$，即 $\left(a-3\right)x+2\leq 0$ 在 $x\in\left(\frac{2}{3},1\right]$ 恒成立，

令 $q\left(x\right)=\left(a+3\right)x-2$，

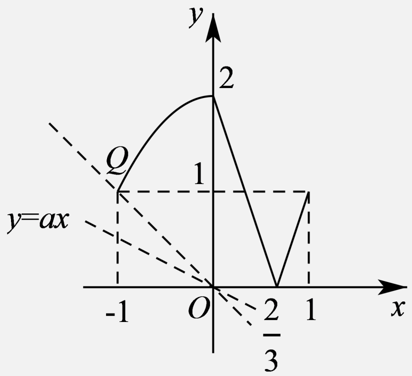
只需 $\begin{cases}q\left(\frac{2}{3}\right)\leq 0\\ q\left(1\right)\leq 0\end{cases}$，解得 $a\leq 0$，

综上，$a\geq -1$ 与 $a\leq 0$ 取交集得，$a\in\left[-1,0\right]$；

法二：画出 $y=\left|f\left(x\right)\right|$ 在 $x\in\left[-1,1\right]$ 上的图象与 $y=ax$ 的图象，

其中 $k_{OQ}=-1$，要想 $\left|f\left(x\right)\right|\geq ax$ 在 $x\in\left[-1,1\right]$ 上恒成立，

则 $a\in[-1,0]$.



故选：B

24．已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 满足 $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-f(x)$，且在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上恰好存在两个极值点，则 ω 的最大值为（　）

A．$\dfrac{44}{3}$　　B．$\dfrac{56}{3}$　　C．$\dfrac{46}{3}$　　D．$\dfrac{20}{3}$

【答案】A

【分析】由已知等式得函数图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，由极值点的个数结合对称中心得出周期的范围，即得 ω 的范围，然后可验证选项 A 满足题意.

【详解】$f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-f(x)$，所以 $f(\dfrac{\pi}{4}+x)=f\left[\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{4}-x)\right]=-f(\dfrac{\pi}{4}-x)$，

所以点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 是函数图象的一个对称中心.

$f(\dfrac{\pi}{4})=\sin\left(\dfrac{\omega\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，$\dfrac{\omega\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=k\pi$，$\omega=4k-\dfrac{4}{3},k\in Z$．排除 C.

$\omega>0$，则 $k\in N^*$.

函数在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上恰好存在两个极值点，记最小正周期为 T，$\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $\dfrac{T}{2}\le\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{3}{2}T$，$\dfrac{\pi}{9}<T\le\dfrac{\pi}{3}$，又 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$，所以 $6\le\omega<18$，排除 B，

若 $\omega=\dfrac{44}{3}$，则 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{3}{22}\pi$，$(\dfrac{\pi}{4},0)$ 是对称中心，$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{4}T<\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{4}T=\dfrac{31}{88}\pi>\dfrac{\pi}{3}$，

即对称中心右侧第一个极值点在 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ 上，而第二个极值点在区间 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ 外．满足题意.

故选：A.

25．若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调，且在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上存在极值点，则 ω

的取值范围是（　）

A. $\left(\frac{1}{3},2\right]$　　B. $\left(\frac{1}{2},2\right]$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{6}\right]$　　D. $\left(0,\frac{7}{6}\right]$

【答案】C

【分析】依据函数在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调，可知$\omega\le 2$，计算出函数的对称轴，然后根据函数在所给区间存在极值点可知$\frac{7\pi}{6\omega}\ge\pi$，最后计算可知结果.

【详解】因为$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调，所以$T\ge\pi$，则$\frac{2\pi}{\omega}\ge\pi$，由此可得$\omega\le 2$.

因为当$\omega x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，即$x=\frac{\frac{\pi}{6}+k\pi}{\omega}(k\in Z)$时，函数取得极值，

欲满足在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上存在极值点，因为周期$T\ge\pi$，故在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上有且只有一个极值，

故第一个极值点$x=\frac{\pi}{6\omega}<\frac{\pi}{3}$，得$\omega>\frac{1}{2}$.又第二个极值点$x=\frac{7\pi}{6\omega}\ge\frac{7\pi}{12}>\frac{\pi}{2}$，

要使$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调，必须$\frac{7\pi}{6\omega}\ge\pi$，得$\omega\le\frac{7}{6}$.

综上可得，ω的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{6}\right]$.

故选：C

【点睛】思路点点睛：第一步：先根据函数在所给区间单调判断ω；第二步：计算对称轴；第三步：依据函数在所给区间存在极值点可得$\frac{\pi}{6\omega}<\frac{\pi}{3}$，$\frac{7\pi}{6\omega}\ge\pi$即可.

26．已知函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$上是增函数，且在$[0,4\pi]$上恰有一个极大值点与一个极小值点，则$\omega$的取值范围为（　）

A. $\left[\frac{1}{8},\frac{5}{8}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$　　C. $\left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

【答案】C

【分析】根据正弦型函数的单调性可知$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega}\right]$，进而求出$\omega$的范围，然后结合正弦型函数的极值点进一步确定出$\omega$的范围.

【详解】由题意，$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega}\right]$，所以$\begin{cases}-\frac{\pi}{2\omega}\le-\frac{3\pi}{4}\\\frac{\pi}{2\omega}\ge\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\omega\le\frac{2}{3}$，又因为$\omega>0$，所以$0<\omega\le\frac{2}{3}$；又$f(x)$在$x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}(k\in\mathbf{Z})$处取得极大值，在$x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{3\pi}{2\omega}(k\in\mathbf{Z})$处取得极

小值，可得$0<\frac{3\pi}{2\omega}\le 4\pi<\frac{5\pi}{2\omega}$，所以$\frac{3}{8}\le\omega<\frac{5}{8}$，则$\omega\in\left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$.

故选：C.

27．将函数$f\left(x\right)=2\sin\omega x\left(\omega\in\mathbf{N}^*\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数$g(x)$的图象，若$g(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，则下列说法正确的是（   ）

A．$\omega=3$

B．直线$x=\frac{\pi}{6}$为$g(x)$图象的一条对称轴

C．$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$成中心对称

D．$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为$-\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】由题设可得$g(x)=2\sin\omega(x+\frac{\pi}{6})$且$\begin{cases}2k\pi+\frac{\pi}{2}\le\frac{\omega\pi}{3}\\2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ge\frac{2\omega\pi}{3}\end{cases}$，即可求$\omega$，利用正弦函数的性质判断各选项的正误.

【详解】由题设，$g(x)=f(x+\frac{\pi}{6})=2\sin\omega(x+\frac{\pi}{6})$，

$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$有$\omega(x+\frac{\pi}{6})\in[\frac{\omega\pi}{3},\frac{2\omega\pi}{3}]$，$g(x)$递减，

$\therefore\begin{cases}2k\pi+\frac{\pi}{2}\le\frac{\omega\pi}{3}\\2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ge\frac{2\omega\pi}{3}\end{cases}$且$k\in Z,\omega\in N^*$，则$6k+\frac{3}{2}\le\omega\le 3k+\frac{9}{4}$，故$\omega=2$，A 错误；

$\therefore g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

$g(\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}\ne\pm 2$，B 错误；

$g(\frac{\pi}{2})=2\sin\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}\ne 0$，C 错误；

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上有$2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$，则$g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[-\sqrt{3},2]$，即$g(x)_{\min}=-\sqrt{3}$，D 正确.

故选：D.

28．将函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数$g\left(x\right)$的图象，则下列关于函数$g\left(x\right)$的说法不正确的是（   ）

A．最大值为$\sqrt{3}$，图象关于直线$x=\frac{\pi}{12}$对称

B．在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

C．最小正周期为π

D．图象关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称

【答案】A

【分析】根据三角函数图象变换求得$g\left(x\right)$，然后根据三角函数的最值、对称性、单调性、最小正周期等知识确定正确答案.

【详解】函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，

得到$g\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sqrt{3}\cos\left(2x+\pi\right)$.

A 选项，$g\left(x\right)$的最大值是$\sqrt{3}$，

$2\times\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{7\pi}{6}$，所以直线$x=\frac{\pi}{12}$不是$g\left(x\right)$的对称轴，所以 A 选项错误.

B 选项，$0<x<\frac{\pi}{2},0<2x<\pi,\pi<2x+\pi<2\pi$，

所以$g\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，B 选项正确.

C 选项，$g\left(x\right)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，C 选项正确.

D 选项，$2\times\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$，

所以$g\left(x\right)$图象关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称，D 选项正确.

故选：A

二、多选题

29．将函数$y=\cos2x$的图象沿x轴向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再向上平移$\frac{1}{2}$个单位长度，得到函数$g\left(x\right)$的图象，则（　　）

A．函数$y=g\left(x\right)$的最小正周期为π

B．$g\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

C．$g\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{4}$对称

D．$g\left(x\right)$的图象关于点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$中心对称

【答案】ACD

【分析】根据三角函数图象的平移变换可得$g\left(x\right)$的解析式，结合正弦函数的周期公式，即

可判断 A；结合正弦函数的单调性可判断 B；代入验证即可判断 C；根据正弦函数的对称中心以及图象的平移可判断 D.

【详解】由题意可得 $g\left(x\right)=\cos 2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}=\cos(2x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}=\sin 2x+\frac{1}{2}$，

则函数 $y=g\left(x\right)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 正确；

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$2x\in\left(0,\pi\right)$，由于 $y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减，

即 $y=\sin x$在$\left(0,\pi\right)$上不单调，故 $g\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上不单调，B 错误；

当$x=\frac{3\pi}{4}$时，$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，即函数$g\left(x\right)$取到最小值，

故$g\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{4}$对称，C 正确；

将$x=0$代入$y=\sin 2x$中$\sin 0=0$，即$y=\sin 2x$的图象关于点$(0,0)$对称，

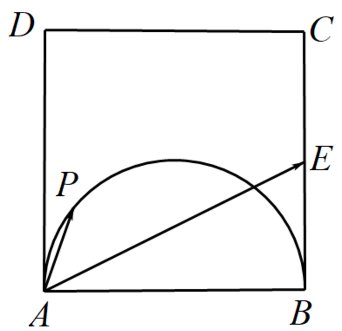
将$y=\sin 2x$的图象向上平移$\frac{1}{2}$个单位，即得到$g\left(x\right)$的图象，

故$g\left(x\right)$的图象关于点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$中心对称，D 正确，

故选：ACD

三、填空题

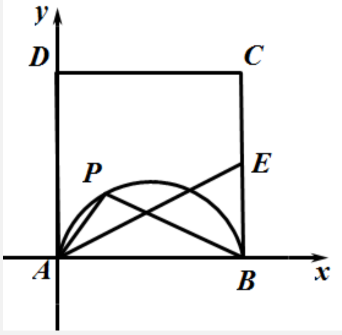
30．如图，在正方形$ABCD$中，$AB=2$，E为BC的中点，点P是以AB为直径的圆弧上任一点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}$的最大值为________.



【答案】 $2+\sqrt{5}$/$\sqrt{5}+2$

【分析】以 A 为原点，AB,AD所在直线分别为x,y轴，建立平面直角坐标系，利用平面向量数量积的坐标运算求出$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}$，再根据三角形函数知识求出最大值，即可得解.

【详解】以 A 为原点，AB,AD所在直线分别为x,y轴，建立平面直角坐标系，如图：



则 $A(0,0)$， $\boldsymbol{E(2,1)}$， $B(2,0)$，

以 AB 为直径的圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，

设 $P(1+\cos\theta,\sin\theta)$， $\theta\in[0,\pi]$，

则 $\overrightarrow{AP}=(1+\cos\theta,\sin\theta)$， $\overrightarrow{AE}=(2,1)$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}=2(1+\cos\theta)+\sin\theta=\sin\theta+2\cos\theta+2=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)+2$，其中 $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时， $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}$ 取最大值 $\sqrt{5}+2$.

故答案为：$\sqrt{5}+2$.

31．已知命题 p：任意正数 x，恒有 $\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}>1$，则命题 p 的否定为_____.

【答案】存在正数 x_0，使 $\left(x_0+1\right)\mathrm{e}^{x_0}\le 1$

【分析】含有全称量词的否定，改成特称量词即可.

【详解】由全称命题的否定为特称命题知：

存在正数 x_0，使 $\left(x_0+1\right)\mathrm{e}^{x_0}\le 1$.

故答案为：存在正数 x_0，使 $\left(x_0+1\right)\mathrm{e}^{x_0}\le 1$

32．已知命题 p： $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， $\sin x<x$，那么命题 $\neg p$ 是_____.

【答案】$\exists x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， $\sin x\ge x$.

【分析】根据全称命题的否定为特称命题，即可得出结果.

【详解】由题意知：命题 p： $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， $\sin x<x$，

$\therefore$命题 $\neg p$： $\exists x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， $\sin x\ge x$.

故答案为：$\exists x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\sin x\geq x$.

33．已知正实数x，y满足$x+2y=3xy$，则$4x+y$的最小值______.

【答案】$3+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

【解析】由$x+2y=3xy$，得到$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$,再利用“1”的代换，转化为

$4x+y=\dfrac{1}{3}\left(9+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{4x}{y}\right)$，利用基本不等式求解.

【详解】因为正实数x，y满足$x+2y=3xy$，

所以$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$,

所以$4x+y=\dfrac{1}{3}(4x+y)\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{3}\left(9+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{4x}{y}\right)\geq\dfrac{1}{3}\left(9+2\sqrt{\dfrac{2y}{x}\cdot\dfrac{4x}{y}}\right)=3+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$,

当且仅当$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3\\ \dfrac{2y}{x}=\dfrac{4x}{y}\end{cases}$,即$\begin{cases}x=\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}\\ y=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$取等号,

所以$4x+y$的最小值是$3+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$,

故答案为：$3+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

34．已知$a,b>0$，则$\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{a+b}$的最小值为______.

【答案】3

【分析】$\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{a+b}=\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{4}{1+\dfrac{b}{a}}-1$，利用基本不等式求解即可.

【详解】解：$\because a,b>0$，$\therefore\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{a+b}=\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{4}{1+\dfrac{b}{a}}-1\geq2\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}+1\right)\cdot\dfrac{4}{1+\dfrac{b}{a}}}-1=3$，

当且仅当$\dfrac{b}{a}+1=\dfrac{4}{1+\dfrac{b}{a}}$，即$a=b=1$时取等号.

故答案为3.

【点睛】本题考查了基本不等式的应用，关键要变形凑出积为定值的形式，属基础题.

35．已知$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle BAC$的平分线交$BC$于$D$，$AD=2$，则$BC$的最小值为_______.

【答案】$4\sqrt{3}$

【解析】根据题意有$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}$，设$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，利用面积公式和基本不等式得到$bc\geq 16$，再利用余弦定理可得结果.

【详解】设$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}$得$\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot 2c\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2b\sin\frac{\pi}{3}$，

整理得：$bc=2\left(b+c\right)\geq 4\sqrt{bc}$

所以$\sqrt{bc}\geq 4$，$bc\geq 16$

由余弦定理得$a=\sqrt{b^2+c^2+bc}\geq\sqrt{3bc}\geq 4\sqrt{3}$，当$b=c$时取等号

所以BC的最小值为$4\sqrt{3}$.

故答案为：$4\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查正余弦定理的应用，基本不等式的应用，属于中档题.

36．对于实数 a，b，c，有下列说法①若$a>b$，则$ac<bc$；②若$ac^2>bc^2$，则$a>b$；③若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$；④若$a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则$a>0$，$b<0$.其中正确的是_____(填序号)

【答案】②③④

【分析】利用不等式的性质可逐一判定.

【详解】当$c=0$时，可以判定①错误；

因为$ac^2>bc^2$，所以$c^2>0$,故不等式两边可同时除以c^2，不变号，故②正确；

因为$a<b<0$，所以对于$a<b$,不等式两边同时乘以a，不等式变号，故$a^2>ab$，不等式两边同时乘以b，不等式变号，故$ab>b^2$，所以$a^2>ab>b^2$成立，故③正确；

因为$a>b$，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$，所以$b-a<0,ab<0$，故$a>0$，$b<0$，故④正确.

故答案为：②③④.

37．已知a，$b\in\mathbf{R}$，则下列选项中能使$\frac{b}{a}>1$成立的是______，能使$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的是______（填上正确的序号）.

①$b>a>0$　②$a>b>0$　③$b<0<a$　④$b<a<0$

【答案】　①④　②④

【分析】由不等式的性质逐一判断即可求解.

【详解】①$b>a>0$得$\frac{b}{a}>1$，

④$b<a<0$得$\frac{b}{a}>1$，

故能使$\frac{b}{a}>1$成立的是①④；

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$，$\frac{b-a}{ab}<0$

由②$a>b>0$故$\frac{b-a}{ab}<0$，由④$b<a<0$，

故$\frac{b-a}{ab}<0$，故能使$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的是②④.

故答案为：①④，②④.

38．已知a,b,c均为实数，有下列说法:

①若$a<b<0$，则$a^2<b^2$；

②若$\frac{a}{b}<c$，则$a<bc$；

③若$a>b$，则$c-2a<c-2b$；

④若$a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

其中，正确的结论是______.(填序号)

【答案】③

【分析】用特殊值结合不等式的性质即可判断.

【详解】①用特殊值法检验．令$a=-2$，$b=-1$，有$4>1$，故①错误；

②当$b<0$时，有$a>bc$，故②错误；

③当$a>b$时，有$-2a<-2b$，从而$c-2a<c-2b$，故③正确；

④当$a>0$，$b<0$时，显然有$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故④错误．综上，只有③正确.

故答案为：③

39．对于实数a,b,c，有下列命题：①若$a>b$，则$ac<bc$；②若$ac^2>bc^2$，则$a>b$；③若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$；④若$c>a>b>0$，则$\frac{a^2}{c-a}>\frac{b^2}{c-b}$；⑤若$a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$则$a>0,b>0$，其中真命题为（填写序号）__________

【答案】②③④

【分析】根据不等式的性质，可判断①是假命题；②③是真命题；

$c>a>b>0,a^2>b^2>0,0<c-a<c-b,\dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{c-b}>0$，$\dfrac{a^2}{c-a}>\dfrac{b^2}{c-b}$成立，④为真命题；将$\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}$做差,通分，结合$a>b$，可得$a>0,b<0$，⑤为假命题，可得出结论.

【详解】①若$a>b,c<0$时，则$ac>bc$，所以为假命题；

②若$ac^2>bc^2$，则$c^2>0$，所以$a>b$成立，为真命题；

③若$a<b<0,a^2>ab,ab>b^2$，

$\therefore a^2>ab>b^2$ 成立，所以为真命题；

④若$c>a>b>0,a^2>b^2>0,0<c-a<c-b,\dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{c-b}>0$，

$\therefore \dfrac{a^2}{c-a}>\dfrac{b^2}{c-b}$，所以为真命题；

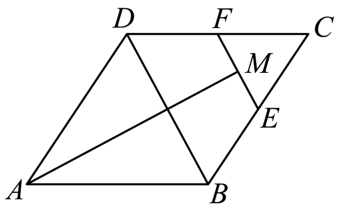
⑤$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，则$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}>0$，$a>b,ab<0,a>0,b<0$，

所以为假命题.

故答案为:②③④

【点睛】本题考查不等式性质以及应用，属于基础题.

40．如图，在菱形$ABCD$中，$AB=2,\angle BAD=60^{\circ}$，$E,F$分别是$BC,CD$的中点，若线段$EF$有一点$M$满足$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}(m\in R)$，则$m=$________，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=$______.



【答案】　$\dfrac{5}{6}$　　$-\dfrac{1}{3}$

【分析】先利用平面向量基本定理得到$\overrightarrow{AM}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{1}{2}+\lambda\right)\overrightarrow{AD}$，结合题意，即可求出$m$的值；根据平面向量的数量积即可求出$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$.

【详解】设$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{BD}$，

在菱形$ABCD$中，E,F分别是BC,CD的中点，所以

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\lambda(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{1}{2}+\lambda\right)\overrightarrow{AD}$，

又$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，所以$\begin{cases}1-\lambda=m\\ \dfrac{1}{2}+\lambda=\dfrac{2}{3}\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{6}\\ m=\dfrac{5}{6}\end{cases}$，

所以$\overrightarrow{AM}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}^2-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，

因为在菱形$ABCD$中，$AB=2,\angle BAD=60°$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\times4-\dfrac{5}{6}\times4+\dfrac{1}{6}\times2\times2\times\cos60^{\circ}=-\dfrac{1}{3}$.

故答案为：$\dfrac{5}{6}$；$-\dfrac{1}{3}$.

【点睛】本题主要考查平面向量基本定理以及平面向量的数量积，考查学生的运算求解能力，属于基础题.

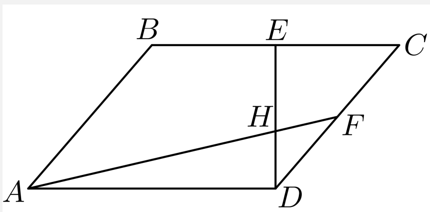
41．在边长为2的菱形$ABCD$中，$\angle ABC=120°$，E是BC的中点，F是边CD上的一点，DE交AF于H．若F是CD的中点，$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}$，则$\lambda+\mu=$_________；若$F$在边$CD$上（不含端点）运动，则$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DH}$的取值范围是_________.

【答案】　$\dfrac{6}{5}$　$\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$

【分析】(1）由D,H,E三点共线，可得$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AE}=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{2})\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AF}=t(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})=t\overrightarrow{BC}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{AB}$，据此可得$t=\dfrac{4}{5}$，从而可求得$\lambda+\mu$的值.

（2）由图可求得$DH\in(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，根据向量积即可知$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DH}=\left|\overrightarrow{DH}\right|^2\in(0,\dfrac{4}{3})$.

【详解】(1）如图所示：



设$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AF}=t(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})=t\overrightarrow{BC}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{AB}$，

由D,H,E三点共线，

可设$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AE}$

$=k\overrightarrow{AD}+(1-k)(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD})$

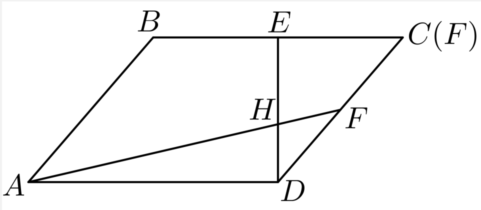
$=\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)\overrightarrow{BC}+(1-k)\overrightarrow{AB}$，

则有$\begin{cases}t=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\\ \frac{t}{2}=1-k\end{cases}$，解得：$t=\frac{4}{5}$，

$\therefore \overrightarrow{AH}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$，即$\lambda+\mu=\frac{6}{5}$.

（2）如图所示：当点F与点C重合时，此时DH最长，

易知$\triangle ADH$ F $\triangle CEH$，且相似比为$2:1$，



$\angle DCB=60°$，在アDCE中，由余弦定理得：

$DE^2=DC^2+CE^2-2DC\times CE\times\cos 60°=3$，

所以$DE=\sqrt{3}$，此时满足$DE^2+CE^2=DC^2$，所以$DE\perp CE$，

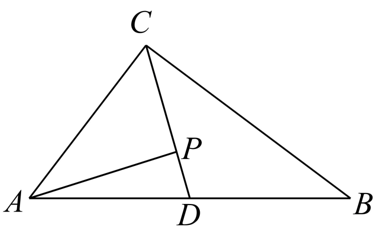
所以$\angle ADE=90°$，此时$DH=\frac{2}{3}DE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

由图可知，$DH\in(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$，

则$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DH}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH})\cdot\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DH}^2=\left|\overrightarrow{DH}\right|^2\in(0,\frac{4}{3})$.

故答案为：$\frac{6}{5}$；$\left(0,\frac{4}{3}\right)$.

42．如图，在VABC中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，D为AB中点，P为CD上一点，且满足$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，V$ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则$t=$________；$|\overrightarrow{AP}|$的最小值为________.



【答案】 $\frac{1}{3}$； $\sqrt{2}$.

【分析】根据平面向量加法的几何意义、共线向量的性质，结合平面向量的运算性质、基本不等式进行求解即可.

【详解】设$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}$，由

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\lambda(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$,而

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以有$\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{3}\\ \lambda=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{3}\\ \lambda=\frac{1}{3}\end{cases}$，即$t=\frac{1}{3}$；

因为VABC的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，

所以有$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=6$，

因为$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以有$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{1}{3}(\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right|)=\frac{1}{3}\sqrt{(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})^2}=\frac{1}{3}\sqrt{\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}$

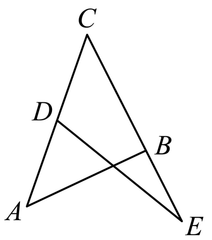
$=\frac{1}{3}\sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+6}\ge\frac{1}{3}\sqrt{2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|+6}=\frac{1}{3}\sqrt{18}=\sqrt{2}$，

当有仅当$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6}$时取等号，

故答案为：$\frac{1}{3}$；$\sqrt{2}$.

【点睛】关键点睛：运用基本不等式是解题的关键.

43．VABC中，点D是AC的中点，点E满足$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，记$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{DE}=$_____；若$AB\perp DE$，则$\angle ACB$的最大值为_____.



【答案】　$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　　$\frac{\pi}{6}$

【分析】(1)根据平面向量的基本定理即可求解；(2)根据垂直关系的数量积表示，利用向量的数量积运算律，表示出$\angle ACB$的余弦值，再利用基本不等式即可求解.

【详解】第一问考查平面向量的基本定理，考查直观想象素养，问题情境较简单，是对基础知识、基本技能的考查．同时新高考I卷第3题，是类似的一道选择题，这说明高考注重对平面向量基本定理的考查，以此评价考生的直观想象素养的水平．与课本试题，如图6.3-4，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，且$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\left(t\in\mathbf{R}\right)$，用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$.

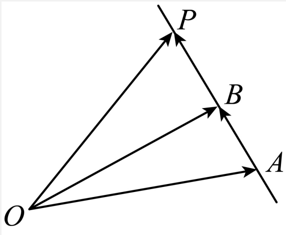


图6.3-4

解：因为$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+t\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}=\left(1-t\right)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

观察$\overrightarrow{OP}=\left(1-t\right)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，你有什么发现？

发现：$1-t+t=1$，即:若A,B,P三点共线，则$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,且$\lambda+\mu=1$.

本题中，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$；

第二问设置了垂直的情境，与平面向量的数量积运算相关联．对于最值问题，以基本不等式为工具，突显问题的综合性．解题时，运用第一问的结论，结合条件中的垂直关系，不难发现运用“基底法”可将相关向量转换成“已知向量”，于是可得，$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=0$，

整理得$2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos C=\frac{3}{2}\vec{b}^2+\frac{1}{2}\vec{a}^2$，即$\cos C=\frac{\frac{3}{2}\vec{b}^2+\frac{1}{2}\vec{a}^2}{2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$．结合所求的最值问题，需要联想求最值的工具，对于含有两个变量的最值问题，运用基本不等式是首选，由基本不等式得，$\cos C=\frac{\frac{3}{2}\vec{b}^2+\frac{1}{2}\vec{a}^2}{2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\ge\frac{2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\left|\vec{b}\right|\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\left|\vec{a}\right|}{2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$\sqrt{3}\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|$时，等号成立．于是$\angle ACB$的最大值为$\frac{\pi}{6}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b};\frac{\pi}{6}$.

该问将数学中平面向量与不等式单元相融合，充分考查了考生灵活运用知识的技能和理解数学思想方法的能力，这也是本题的创新点与命题的主要意图．由此看来，平面向量的关联情境是高考的热点问题，通过平面向量基本定理将所求向量进行转化，通过向量运算、函数、基本不等式等方法解决相关最值问题是高考的命题导向．

本题融基础性、应用性、综合性、创新性于一体．本题设置的求最值问题情境，既体现了基本不等式的应用，又是对考生求含有两个变量的最值问题的基本活动经验的考查．题目

的综合性与创新性在于将平面向量与基本不等式巧妙地结合在一起．考生在解第二问时，首先要提出“如何建立所求角与边的关系”，结合图形与垂直条件，考生可发现其中的等量关系，由于已知条件中没有边之间的关系，考生会提出“用什么知识作为求最值的工具”，通过提取基本活动经验（两个变量），联想到基本不等式，进而求得结果．该过程是考生“四能”的体现，特别是面对“新情境”，发现与提出问题是解题的关键．由此看来，高考经常通过设计具有基础性、应用性、综合性、创新性相结合的题目，考查考生“四基”“四能”．

44．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$ $(A>0,\omega>0,|\phi|<\dfrac{\pi}{2})$ 图象相邻的一个最大值点和一个对称中心分别为 $(\dfrac{\pi}{6},2),(\dfrac{5\pi}{12},0)$，则 $g(x)=f(x)\cos 2x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{4})$ 的值域为___________.

【答案】$(0,\dfrac{3}{2}]$

【解析】由函数的最值求出A，由周期求出 ω，由五点法作图求出 φ 的值，求出 $f(x)$ 的解析式，再利用二倍角公式、降幂公式、以及辅助角公式，将 $g(x)$ 化为正弦型函数，即可求出结论.

【详解】由题知，$A=2$，$\dfrac{T}{4}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $T=\pi=\dfrac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=2$，

由 $2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}+\phi\right)=2$，$|\phi|<\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\phi=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$g(x)=f(x)\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x+\dfrac{1}{2}\cos 4x+\dfrac{1}{2}=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，因为 $0\le x<\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\dfrac{\pi}{6}\le 4x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$，所以 $-\dfrac{1}{2}<\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 1$，

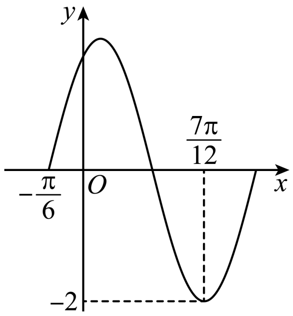
所以 $0<g\left(x\right)=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\le\dfrac{3}{2}$，

所以 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值域为 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$.

故答案为: $(0,\dfrac{3}{2}]$

【点睛】本题考查正弦函数图像和性质，三角恒等变换化，正弦函数的定义域和值域，属于中档题.

45．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（其中 $A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则下列结论中正确的有_____.



（1）$\omega=2$

（2）$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{2\pi}{3}$对称

（3）$f\left(x\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

（4）$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right]$上的值域为$\left[-2,1\right]$

【答案】(1)(3)

【分析】依据图象解出函数中的各参数，然后一一判别.

【详解】由图知$f\left(x\right)_{min}=-2$，$\frac{3}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{4}$.所以$A=2$，$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$.则$\omega=2$.

因为$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-2,\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.故（1）对.

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\frac{5\pi}{3}=2\sin\left(2\pi\text{-}\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\neq\pm2$.

则函数图象不关于直线$x=\frac{2\pi}{3}$对称，（2）错.

$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，（3）对.

当$x\in\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$，令$t=2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$，

则$y=2\sin t$在$\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right]$上递减，在$\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$上递增，

因为$-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}>-\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$，

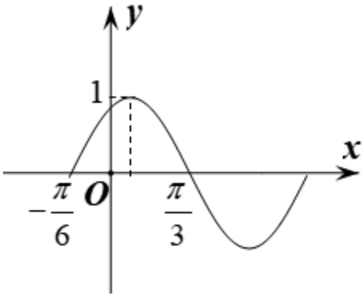
所以当$t=-\frac{4\pi}{3}$时，$y_{\max}=2\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$；当$t=-\frac{\pi}{2}$时，$y_{\min}=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$

所以当$x\in\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right]$时，函数$f\left(x\right)$的值域为$\left[-2,\sqrt{3}\right]$，（4）错.

故答案为：(1)(3)

【点睛】注意图象中蕴含的周期，从而解出ω，在求值域时，可采用换元法或整体思想来求解.

46．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin x+\cos x$ 的最大值为______.



【答案】$\sqrt{2}+1$##$1+\sqrt{2}$

【分析】根据图象求得函数 $y=f\left(x\right)$ 的解析式，化简函数 $y=f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin x+\cos x$ 的解析式，令 $t=\sin x+\cos x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，可得 $\sin 2x=t^2-1$，将函数转化为关于 t 的二次函数，利用二次函数的性质可求得该函数的最大值.

【详解】由图象可得 $A=f\left(x\right)_{\max}=1$，

函数 $y=f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $T=2\times\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，

则 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\varphi\right)$，

因为 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\times\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，

所以 $\varphi-\dfrac{\pi}{3}=2k\pi\left(k\in Z\right)$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，

由于 $\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $k=0$， $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

因为 $f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin x+\cos x=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]+\sin x+\cos x$

$=\sin 2x+\sin x+\cos x$，

令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，

则 $t^2=1+\sin 2x$，可得 $\sin 2x=t^2-1$，

所以 $y=t^2+t-1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$，

因为$t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，所以当$t=\sqrt{2}$时，函数$y=t^2+t-1$取最大值$\sqrt{2}+1$，

即$y=f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin x+\cos x$的最大值为$\sqrt{2}+1$，

故答案为：$\sqrt{2}+1$.

47．将函数$f(x)=2(\cos x+\sin x)\cdot\cos x-1$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{24}$个单位得到$g(x)$的图象，且当$x\in\left[\dfrac{11\pi}{24},\dfrac{19\pi}{12}\right]$时，关于$x$的方程$g(x)-a=0$有三个不等实根，则实数$a$的取值范围为_____.

【答案】$\left(-\sqrt{2},-1\right]$

【分析】由题可得$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，进而然后$g\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，讨论$g\left(x\right)$单调性和取值范围即得.

【详解】因为$f\left(x\right)=2\left(\cos x+\sin x\right)\cdot\cos x-1=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以$g\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{24}\right)+\dfrac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

因为$x\in\left[\dfrac{11\pi}{24},\dfrac{19\pi}{12}\right]$，所以$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{2}\right]$，

当$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right]$时，$g\left(x\right)$递减且$g\left(x\right)\in\left[-\sqrt{2},-1\right]$；

当$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right]$时，$g\left(x\right)$递增且$g\left(x\right)\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$；

当$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2}\right]$时，$g\left(x\right)$递减且$g\left(x\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，

因为$g\left(x\right)-a=0$有三个不等实根，所以$a\in\left(-\sqrt{2},-1\right]$.

故答案为：$\left(-\sqrt{2},-1\right]$.

【点睛】关键点睛：本题考查由方程解的个数求参数范围，解题的关键是求出$g\left(x\right)$的解析式，利用$g\left(x\right)$的单调性和范围结合图象性质求解.

48．已知$2\log_2 x=\log_7 y$，且$x\sqrt{y}=14$，则xy的值为__________.

【答案】98

【分析】令$z=\log_2 x^2=\log_7 y$，把对数式化为指数式$x^2=2^z$，$y=7^z$，利用$x\sqrt{y}=14$解出$z=2$，可得x,y的值.

【详解】由对数的性质，得$\log_2 x^2=\log_7 y$，令$z=\log_2 x^2=\log_7 y$，则$x^2=2^z$，$y=7^z$.

因为$x\sqrt{y}=14$，所以$x^2y=196$，即$2^z\cdot 7^z=(2\times 7)^z=14^z=196$，解得$z=2$.

所以$x=2$，$y=49$，从而$xy=98$.

故答案为：98

49．已知$m>0$，$n>0$，$\log_4 m=\log_8 n=\log_{16}(2m+n)$，则$\log_2\sqrt{m}-\log_4 n$的值为________.

【答案】$-\frac{1}{2}$/-0.5

【分析】由题意，设$\log_4 m=\log_8 n=\log_{16}(2m+n)=k$，从而表示出

$m=4^k,n=8^k,2m+n=16^k$，可得$2\times 4^k+8^k=16^k$，化简计算得$\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2}$，从而得

$\frac{m}{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2}$，化简$\log_2\sqrt{m}-\log_4 n=\log_2\sqrt{\frac{m}{n}}$，代入计算即可.

【详解】由题意，设$\log_4 m=\log_8 n=\log_{16}(2m+n)=k$，则$m=4^k,n=8^k,2m+n=16^k$，所以

$2\times 4^k+8^k=16^k$，得$2\times\left(\frac{1}{4}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^k=1$，即$2\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^2+\left(\frac{1}{2}\right)^k-1=0$，解得$\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2}$或

$\left(\frac{1}{2}\right)^k=-1$（舍），因为$\frac{m}{n}=\frac{4^k}{8^k}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$，所以

$\log_2\sqrt{m}-\log_4 n=\log_2\sqrt{m}-\log_2\sqrt{n}=\log_2\sqrt{\frac{m}{n}}=\log_2\sqrt{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$

【点睛】解答本题的关键在于先利用整体代入法得$2\times 4^k+8^k=16^k$，化简以后得关于$\left(\frac{1}{2}\right)^k$的一元二次方程，求解出$\left(\frac{1}{2}\right)^k$，即求解出$\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$，从而整体代入所求式子.

50．$\frac{\cos 10^\circ\left(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ\right)}{\sin 40^\circ}=$______.

【答案】2

【分析】根据切化弦及两角和正弦公式的逆用即可得解.

【详解】$\dfrac{\cos10^\circ\left(1+\sqrt{3}\tan10^\circ\right)}{\sin40^\circ}=\dfrac{\cos10^\circ\left(1+\sqrt{3}\dfrac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}\right)}{\sin40^\circ}=\dfrac{\cos10^\circ+\sqrt{3}\sin10^\circ}{\sin40^\circ}$

$=\dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}\cos10^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin10^\circ\right)}{\sin40^\circ}$

$=\dfrac{2\sin\left(10^\circ+30^\circ\right)}{\sin40^\circ}=2$.

故答案为：2

51．函数 $y=\sin x+\cos x-\sin x\cos x$ 的值域为_____.

【答案】$[-\dfrac{1}{2}$-$\sqrt{2}$，1]

【分析】根据同角三角函数基本关系化简得到 $y=-\dfrac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)^2+\left(\sin x+\cos x\right)+\dfrac{1}{2}$，然后利用换元法，结合二次函数的性质，即可求解.

【详解】由题意，利用三角函数的基本关系式，可得 $y=\sin x+\cos x-\sin x\cos x$

$=\sin x+\cos x-\dfrac{\left(\sin x+\cos x\right)^2-1}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)^2+\left(\sin x+\cos x\right)+\dfrac{1}{2}$，

令 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=t$，则 $t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，可得 $y=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}$，

因为函数 $y=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 上单调递增，$\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减，

所以当 $t=-1$ 时取得最大值，$y_{\max}=-\dfrac{1}{2}\times1^2+1+\dfrac{1}{2}=1$，

当 $t=-\sqrt{2}$ 时取得最小值，$y_{\min}=-\dfrac{1}{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}$，

所以函数 $y=\sin x+\cos x-\sin x\cos x$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2},1\right]$.

故答案为：$\left[-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2},1\right]$.

52．已知 ΔABC 不是直角三角形，$C=45^\circ$，则 $(1-\tan A)(1-\tan B)=$__.

【答案】2.

【解析】由已知可得 $A+B=135^\circ$，利用正切函数的和角公式即可求解.

【详解】因为 $C=45^\circ$，

所以 $A+B=135^\circ$，

则 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-1$，

整理得 $\tan A+\tan B=\tan A\tan B-1$，

所以 $(1-\tan A)(1-\tan B)=\tan A\tan B+1-(\tan A+\tan B)$，

$=\tan A\tan B+1-(\tan A\tan B-1)$，

$=2$，

故答案为：2.

53．在$\triangle ABC$中，设角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$\vec{m}=(\cos C,2a-c),\vec{n}=(b,-\cos B)$且$\vec{m}\perp\vec{n}$，则$B=$_________.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】由$\vec{m}\perp\vec{n}$，即$b\cos C-\left(2a-c\right)\cos B=0$，由正弦定理和正弦的和角公式可得$\sin A=2\sin A\cdot\cos B$，即$\cos B=\dfrac{1}{2}$得出答案.

【详解】由$\vec{m}\perp\vec{n}$，即$b\cos C-\left(2a-c\right)\cos B=0$，即$b\cdot\cos C+c\cdot\cos B=2a\cdot\cos B$

所以$\sin \mathrm{B}\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=2\sin A\cdot\cos B$,即$\sin\left(C+B\right)=2\sin A\cdot\cos B$

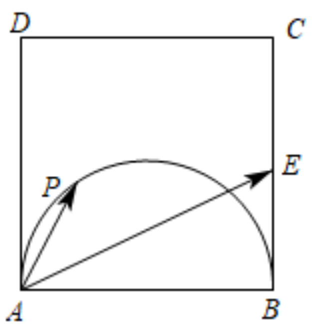
即$\sin A=2\sin A\cdot\cos B$,又$A\in\left(0,\pi\right)$,则$\sin A\neq 0$

所以$\cos B=\dfrac{1}{2}$,又$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$

故答案为：$\dfrac{\pi}{3}$

四、解答题

54．如图，在正方形$ABCD$中，AB=2，E为BC的中点，点P是以AB为直径的圆弧上任一点.设$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AD}$，



（1）求$x-2y$的最大值、最小值.

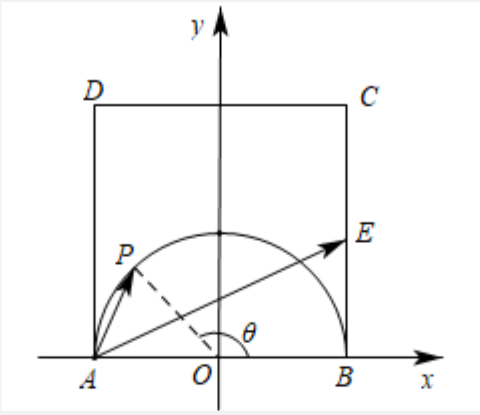
（2）求$x+y$的取值范围.

【答案】(1) $x+2y$ 的最大值为 2，最小值为 $1-\sqrt{2}$；(2) $x+y\in[0,\frac{\sqrt{5}+1}{4}]$.

【解析】(1) 取 AB 中点 O，以 O 点为原点，以 AB 所在直线为 x 轴，如图建系，可求得各点坐标，设∠$POB=\theta$，则 $P(\cos\theta,\sin\theta)\left(\theta\in[0,\pi]\right)$，进而可得 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}$ 的坐标，根据题意，可求得 x，y 的表达式，可得 $x-2y$ 的表达式，根据 θ 的范围，结合三角函数性质，即可求得答案；

(2) 根据 (1) 可得 $x+y$ 的表达式，根据 θ 的范围，结合三角函数性质，即可求得答案；

【详解】(1) 取 AB 中点 O，以 O 点为原点，以 AB 所在直线为 x 轴，建立如图平面直角坐标系，



设∠$POB=\theta$，结合题意，可知

$A(-1,0),B(1,0),C(1,2),D(-1,2),E(1,1),P(\cos\theta,\sin\theta)\left(\theta\in[0,\pi]\right)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(\cos\theta+1,\sin\theta),\overrightarrow{AE}=(2,1),\overrightarrow{AD}=(0,2)$

又 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AD}=(2x,x+y)$，

所以 $(2x,x+2y)=(\cos\theta+1,\sin\theta)$，即 $\begin{cases}2x=\cos\theta+1\\x+2y=\sin\theta\end{cases}$,

所以 $\begin{cases}x=\dfrac{\cos\theta+1}{2}\\y=\dfrac{2\sin\theta-\cos\theta-1}{4}\end{cases}$,

所以 $x-2y=\cos\theta-\sin\theta+1=\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})+1$，

因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$，

当 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 即 $\theta=0$ 时， $(x-2y)_{\max}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2$，

当$\theta+\frac{\pi}{4}=\pi$即$\theta=\frac{3\pi}{4}$时，$(x-2y)_{\min}=\sqrt{2}\times(-1)+1=1-\sqrt{2}$，

（2）$x+y=\frac{\cos\theta+1}{2}+\frac{2\sin\theta-\cos\theta-1}{4}=\frac{1}{4}(2\sin\theta+\cos\theta+1)=\frac{1}{4}(\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)+1)$（其中$\tan\varphi=\frac{1}{2},\varphi$为锐角），

因为$0\le\theta\le\pi$，所以$\varphi\le\theta+\varphi\le\pi+\varphi$，

当$\theta+\varphi=\pi+\varphi$，即$\theta=\pi$时，$\sin(\theta+\varphi)_{\min}=-\sin\varphi$，

因为$\tan\varphi=\frac{1}{2},\varphi$为锐角，所以$\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\sin(\theta+\varphi)_{\min}=-\sin\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

当$\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$时，$\sin(\theta+\varphi)_{\max}=\sin\frac{\pi}{2}=1$，

所以$-\frac{\sqrt{5}}{5}\le\sin(\theta+\varphi)\le1$，所以$0\le x+y\le\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，

所以$x+y\in[0,\frac{\sqrt{5}+1}{4}]$.

【点睛】解题的关键是建立合适的坐标系，即可求得x，y，再利用三角函数的性质，进行求解，考查计算化简的能力，综合性较强，属中档题.

55．已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f\left(x\right)=\frac{3^x-a}{3^x+1}$是奇函数.

(1)求a的值；

(2)判断$f\left(x\right)$的单调性，并证明；

(3)若$f\left(2m-m^2\right)+f\left(2m+21\right)\le0$，求实数$m$的取值范围.

【答案】(1)1

(2)增函数，证明见解析

(3)$m\le-3$或$m\ge7$

【分析】（1）由$f(0)=0$求出$a=1$，再验证此时的$f(x)$为奇函数即可；

（2）将$f(x)$的解析式分离常数后可判断出单调性,再利用增函数的定义可证结论成立；

（3）利用奇函数性质化为$f(2m-m^2)\le f(-2m-21)$，再利用增函数性质可求出结果.

【详解】（1）因为$f\left(x\right)=\frac{3^x-a}{3^x+1}$是$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$f(0)=\frac{1-a}{1+1}=\frac{1-a}{2}=0$，即$a=1$，

此时 $f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}$， $f(-x)=\frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=\frac{1-3^x}{1+3^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，

故 $a=1$.

（2）由（1）知，$f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}=1-\frac{2}{3^x+1}$ 为 R 上的增函数，

证明：任取 $x_1,x_2\in \mathrm{R}$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=1-\frac{2}{3^{x_1}+1}-1+\frac{2}{3^{x_2}+1}=\frac{3(3^{x_1}-3^{x_2})}{(3^{x_1}+1)(3^{x_2}+1)}$，

因为 $x_1<x_2$，所以 $3^{x_1}<3^{x_2}$，即 $3^{x_1}-3^{x_2}<0$，又 $(3^{x_1}+1)(3^{x_2}+1)>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

根据增函数的定义可得 $f(x)$ 为 R 上的增函数.

（3）由 $f\left(2m-m^2\right)+f\left(2m+21\right)\le 0$ 得 $f(2m-m^2)\le -f(2m+21)$，

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(2m-m^2)\le f(-2m-21)$，

因为 $f(x)$ 为增函数，所以 $2m-m^2\le -2m-21$，即 $m^2-4m-21\ge 0$，

所以 $m\le -3$ 或 $m\ge 7$.

56．已知函数 $f(x)=(x^2-ax+1)^{-\frac{1}{2}}$.

（1）若函数 $f(x)$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $\forall x\in[\frac{1}{2},2]$，都有 $f\left(x\right)\le \frac{1}{2}$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1） $-2<a<2$；（2） $a\le -\frac{11}{2}$.

【分析】（1）由题意得 $x^2-ax+1>0$ 在 R 上恒成立，可得 $\varDelta<0$，代入数据，化简整理，即可得答案.

（2）根据题意可得 $(x^2-ax+1)^{-\frac{1}{2}}\le \frac{1}{2}$，即 $\forall x\in[\frac{1}{2},2]$ 时 $x^2-ax+1\ge 4$ 恒成立，整理可得 $a\le \frac{x^2-3}{x}$，设 $g\left(x\right)=\frac{x^2-3}{x}$，只需 $a\le g\left(x\right)_{\min}$ 即可，求导，可得 $g(x)$ 的单调性，即可求得 $g(x)$ 的最小值，即可得答案.

【详解】（1）由题意可知 $x^2-ax+1>0$ 在 R 上恒成立，故 $\varDelta<0$

可得 $a^2-4<0$，解得 $-2<a<2$

（2）由题意可得，$(x^2-ax+1)^{-\frac{1}{2}}\le \frac{1}{2}$，即 $\forall x\in[\frac{1}{2},2]$ 时 $x^2-ax+1\ge 4$ 恒成立

可化为$a\le\frac{x^2-3}{x}$，

设$g\left(x\right)=\frac{x^2-3}{x}$，$x\in[\frac{1}{2},2]$，只要$a\le g\left(x\right)_{\min}$即可，

又$g'\left(x\right)=1+\frac{3}{x^2}>0$，所以$g(x)$在$[\frac{1}{2},2]$为增函数，

所以$g\left(x\right)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{2}$，

所以$a\le-\frac{11}{2}$.

【点睛】解题的关键是分离参数，可得$a\le\frac{x^2-3}{x}$恒成立，即$a\le\left(\frac{x^2-3}{x}\right)_{\min}$即可，若处理存在性问题时，只需$a\le\left(\frac{x^2-3}{x}\right)_{\max}$即可，考查分析计算的能力，属中档题.

57．在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，满足：

$c\cdot\cos B\sin C+(\sqrt{3}a+c\sin B)\cos C=0$.

（I）求C的大小；

（II）若$c=\sqrt{3}$，求$a+b$的最大值，并求取得最大值时角A,B的值.

【答案】(I）$\frac{2\pi}{3}$;（II）$\left(a+b\right)_{\max}=2$; $A=B=\frac{\pi}{6}$.

【详解】试题分析：(I）由三角函数恒等变换的应用及正弦定理化简已知等式可得：

$\sin C\sin A=-\sqrt{3}\sin A\sin C$，结合范围$0<A<\pi$，可得$\tan C=-\sqrt{3}$，从而解得$C$的值.

（II）由正弦定理可得$a+b=2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$，由$A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right),A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，可求$\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，即可得解.

试题解析：(I）由$c\cdot\cos B\sin C+(\sqrt{3}a+c\sin B)\cos C=0$.

可得$c\sin(B+C)=-\sqrt{3}a\sin C$，所以$c\sin A=-\sqrt{3}a\sin C$，

由正弦定理可得：$\sin C\sin A=-\sqrt{3}\sin A\sin C$，

因为$0<A<\pi$，所以$\sin A>0$，从而$\sin C=-\sqrt{3}\cos C$，

即$\tan C=-\sqrt{3}$，从而解得：$C=\frac{2\pi}{3}$

（II）由正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2$，

所以：$a+b=2(\sin A+\sin B)=2\left[\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)\right]=2\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$,

又因为$A+B=\frac{\pi}{3}$，得：$A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right),A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，$\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

所以$a+b\in\left(\sqrt{3},2\right]$，所以$(a+b)_{\max}=2$，此时$A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$A=B=\frac{\pi}{6}$

考点：余弦定理；正弦定理.

58．已知函数$f(x)=e^x+ax-1$（e为自然对数的底数）.

（1）当$a=1$时，求过点$(1,f(1))$处的切线与坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若$f(x)\geq x^2$在$(0,1)$上恒成立，求实数a的取值范围.

【答案】(1) $\frac{1}{2(e+1)}$；(2) $a\geq 2-e$.

【详解】试题分析:(1) 当$a=1$时，$f(x)=e^x+x-1$，$f(1)=e$，$f'(1)=e+1$，求得切线方程为$y=(e+1)x+1$，所以切线和坐标轴的交点为$(\frac{1}{e+1},0),(0,-1)$，故面积为$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{e+1}\times 1=\frac{1}{2(e+1)}$；(2) $f(x)\geq x^2$在$(0,1)$上恒成立，化简得

$a\geq\frac{1+x^2-e^x}{x}$，即$a\geq\left(\frac{1+x^2-e^x}{x}\right)_{\max}$，令$h(x)=\frac{1+x^2-e^x}{x}$利用二阶导数求得它的最大值为$2-e$，所以$a\geq 2-e$.

试题解析:

（1）当$a=1$时，$f(x)=e^x+x-1$，$f(1)=e$，$f'(x)=e^x+1$，$f'(1)=e+1$，

函数$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-e=(e+1)(x-1)$，即$y=(e+1)x+1$，

设切线与x轴、y轴的交点分别为A,B，$\therefore A(\frac{1}{e+1},0),B(0,-1)$，

$\therefore S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{e+1}\times 1=\frac{1}{2(e+1)}$，

$\therefore$过点$(1, f(1))$处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为$\dfrac{1}{2(e+1)}$.

（2）由$f(x)\geq x^2$得$a\geq\dfrac{1+x^2-e^x}{x}$，

令$h(x)=\dfrac{1+x^2-e^x}{x}=\dfrac{1}{x}+x-\dfrac{e^x}{x}$，$h'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}$，

令$k(x)=x+1-e^x, k'(x)=1-e^x$，

$\because x\in(0,1), \therefore k'(x)<0$，$\therefore k(x)$在$(0,1)$上是减函数，$\therefore k(x)<k(0)=0$，

因为$x-1<0, x^2>0$，所以$h'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}>0$，

$\therefore h(x)$在$(0,1)$上是增函数，所以$h(x)<h(1)=2-e$，所以$a\geq 2-e$.

考点：函数导数与不等式.

【方法点睛】本题考查函数导数与单调性.确定零点的个数问题：可利用数形结合的办法判断交点个数，如果函数较为复杂，可结合导数知识确定极值点和单调区间从而确定其大致图象.方程的有解问题就是判断是否存在零点的问题，可参变分离，转化为求函数的值域问题处理. 恒成立问题以及可转化为恒成立问题的问题，往往可利用参变分离的方法，转化为求函数最值处理．当一阶导数无法判断原函数单调区间时，要利用其二阶导数来求解.

59．已知函数$f\left(x\right)=x^2-1-\dfrac{a}{2}\ln x$.

（1）若函数$f(x)$在$\left(2, f\left(2\right)\right)$处的切线斜率为2，试求$a$的值及此时的切线方程；

（2）若函数$f(x)$在区间$\left[1, e\right]$（其中$e=2.71828\ldots$为自然对数的底数）上有唯一的零点，求实数a的取值范围.

【答案】(1) $a=8$，$2x-y-1-4\ln 2=0$；(2) $\{a\,|\,a\leq 4$或$a>2(\mathrm{e}^2-1)\}$.

【分析】(1) 根据导数的几何意义求解即可；

（2）讨论参数a的值，确定函数$f(x)$在区间$\left[1, e\right]$的单调性，从而根据零点的个数，得出实数a的取值范围.

【详解】(1) 由$f'\left(x\right)=2x-\dfrac{a}{2x}=\dfrac{4x^2-a}{2x}$，（$x>0$）.

由已知 $f'(2)=4-\frac{a}{4}=2$.

可得：$a=8$

又此时 $f(2)=4-1-4\ln 2=3-4\ln 2$.

所以所求的切线方程为：$y-(3-4\ln 2)=2(x-2)$.

即：$2x-y-1-4\ln 2=0$

（2）$f'(x)=2x-\frac{a}{2x}=\frac{4x^2-a}{2x}$，其中 $x\in[1,e]$

①当 $a\le 4$ 时，$f\ (x)\quad 0$ 在区间 $[1,e]$ 恒成立，$f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 单调递增

又∵ $f(1)=0$，∴函数 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上有唯一的零点，符合题意.

②当 $a\ge 4e^2$ 时，$f'(x)\le 0$ 在区间 $[1,e]$ 恒成立，$f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 单调递减

又∵ $f(1)=0$，∴函数 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上有唯一的零点，符合题意.

③当 $4<a<4e^2$ 时

（i）$1\le x<\frac{\sqrt{a}}{2}$ 时，$f\ (x)<0$，$f(x)$ 单调递减

又∵ $f(1)=0$，$\therefore f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)<f(1)=0$，∴函数 $f(x)$ 在区间 $\left[1,\frac{\sqrt{a}}{2}\right]$ 上有唯一的零点

（ii）当 $\frac{\sqrt{a}}{2}<x\le e$ 时，$f\ (x)>0$，$f(x)$ 单调递增

∴要使 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上有唯一的零点，只有当 $f(e)<0$ 时符合题意

即 $e^2-1-\frac{a}{2}<0$，即 $a>2(e^2-1)$

$\therefore 2(e^2-1)<a<4e^2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上有唯一的零点；

∴综上 a 的取值范围是 $\{a|a\le 4$ 或 $a>2(\mathrm{e}^2-1)\}$.

【点睛】本题主要考查了导数的几何意义的应用以及利用导数研究函数的零点问题，属于中档题.

60．已知函数 $f(x)=(3-2x)\mathrm{e}^x-ax-2$，其中 e 为自然对数的底数.

（I）若函数 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上是单调函数，求实数 a 的取值范围；

（II）若对于任意的 $x\in[0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le ax+1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（I）$(-\infty,-\mathrm{e}]\cup[\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}},+\infty)$；

（II）$[\frac{1}{2},+\infty)$.

【分析】（I）函数单调等价于 $f'(x)\le 0$ 恒成立或 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，利用分离参数的思想，

令 $g(x)=(1-2x)\mathrm{e}^x$，对 $g\left(x\right)$ 进行求导，求出其最值即可；（II）原题等价于

$(3-2x)\mathrm{e}^x-2ax-3\le 0$，令 $t(x)=(3-2x)\mathrm{e}^x-2ax-3$，对其二次求导求出最值即可.

【详解】（I）由题可得 $f'(x)=-2\mathrm{e}^x+(3-2x)\mathrm{e}^x-a=(1-2x)\mathrm{e}^x-a$，

因为函数 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上是单调函数，所以当 $x\in[-2,1]$ 时，$f'(x)\le 0$ 恒成立或 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，

即当 $x\in[-2,1]$ 时，$(1-2x)\mathrm{e}^x-a\le 0$ 恒成立或 $(1-2x)\mathrm{e}^x-a\ge 0$ 恒成立，

所以当 $x\in[-2,1]$ 时，$a\ge[(1-2x)\mathrm{e}^x]_{\max}$ 或 $a\le[(1-2x)\mathrm{e}^x]_{\min}$.

令 $g(x)=(1-2x)\mathrm{e}^x$，$-2\le x\le 1$，则 $g'(x)=(-1-2x)\mathrm{e}^x$，

令 $g'(x)>0$，可得 $-2\le x<-\frac{1}{2}$；令 $g'(x)<0$，可得 $-\frac{1}{2}<x\le 1$，

所以函数 $g(x)$ 在 $[-2,-\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $[-\frac{1}{2},1]$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(-\frac{1}{2})=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

又 $g(-2)=\frac{5}{\mathrm{e}^2}$，$g(1)=-\mathrm{e}$，所以 $g(-2)>g(1)$，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-\mathrm{e}$，

所以 $a\ge\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 或 $a\le -e$，故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-\mathrm{e}]\cup[\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}},+\infty)$.

（II）$f(x)\le ax+1$ 可化为 $(3-2x)\mathrm{e}^x-2ax-3\le 0$，令 $t(x)=(3-2x)\mathrm{e}^x-2ax-3$，$x\ge 0$，

因为对于任意的 $x\in[0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le ax+1$ 恒成立，所以 $t(x)_{\max}\le 0$，

易得 $t'(x)=(1-2x)\mathrm{e}^x-2a$，

令 $h(x)=(1-2x)\mathrm{e}^x-2a$，$x\ge 0$，则 $h'(x)=(-1-2x)\mathrm{e}^x<0$，

所以函数 $t'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$t'(0)=1-2a$，

①当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$1-2a\le 0$，所以 $t'(x)\le t'(0)\le 0$，所以函数 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $t(x)\le t(0)=3-3=0$，即 $t(x)_{\max}\le 0$，符合题意；

②当$a<\frac{1}{2}$时，$1-2a>0$，所以存在$x_0>0$，使得$t'(x_0)=0$，

当$x\in[0,x_0)$时，$t'(x)>0$，所以函数$t(x)$在$[0,x_0)$上单调递增，

因为$t(0)=0$，所以当$x\in(0,x_0)$时，$t(x)>0$，不符合题意.

综上所述，$a\geq\frac{1}{2}$，故实数a的取值范围为$[\frac{1}{2},+\infty)$.

【点睛】本题主要考查了导数与函数单调性的关系，已知单调性求参数，利用导数证明不等式，综合性较强，有一定难度.

61．已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-ax-1$.（e为自然对数的底数）

(1)当$a=-1$时,求曲线$y=f(x)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程;

(2)当$a>0$时,若$f(x)\geq0$对任意$x\in\mathrm{R}$恒成立,求实数a的值;

【答案】(1) $2x-y=0$

(2)1

【分析】(1)先求切点坐标,再利用导数求切线的斜率,最后利用点斜式写出直线的方程;

(2)先求函数$f(x)$单调性,然后求$f(x)$的最小值，$f\left(x\right)\geq0$对任意$x\in\mathrm{R}$恒成立,等价于$f\left(x\right)_{\min}\geq0$,解出$a$的值即可.

【详解】（1）解:由题知当$a=-1$时,

$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+x-1$,

$\therefore f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x+1$,

$\therefore f'\left(0\right)=2$,

Q $f\left(0\right)=0$,

所求切线方程为$y-0=2\left(x-0\right)$,

即$2x-y=0$;

（2）由题得$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-a, a>0$,

令$\mathrm{e}^x-a>0$,

$\therefore \mathrm{e}^x>a=\mathrm{e}^{\ln a}$,

$\therefore x > \ln a$,

令 $e^x - a < 0$,

$\therefore e^x < a = e^{\ln a}$,

$\therefore x < \ln a$,

所以函数 $f(x)$ 的增区间是 $(\ln a, +\infty)$,减区间为 $(-\infty, \ln a)$.

所以当 $a > 0$ 时,

$f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a\ln a - 1$,

则 $f(x) \geq 0$ 对任意 $x \in \mathrm{R}$ 恒成立,

等价于 $f(x)_{\min} = a - a\ln a - 1 \geq 0$

令 $g(a) = a - a\ln a - 1, a > 0$,

则 $g'(a) = 1 - \ln a - 1 = -\ln a$,

当 $x \in (0,1)$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增,

当 $x \in (1,+\infty)$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减,

所以 $g(a) \leq g(a)_{\max} = g(1) = 0$,

故 $a - a\ln a - 1 \geq 0$ 只需 $a = 1$ 即可,

综上: $a = 1$.